Wykład 6

16 kwietnia 2021

10:07

Charakteryzacja WWO na L_p, $1 \le p < \infty$ $\boxed{p \neq 2}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - pr. z miarą skończoną

$\boxed{\text{STW.}}$ Operator $E = E(\cdot | \mathcal{G}) : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$

[Wniosek z nierówności Jensena]

zachowuje podprzestrzeń $L_p(\mu) \subseteq L_1(\mu)$ dla każdego $p \geq 1$

tzn.

$$X \in L_p(\mu) \Rightarrow E(X) \in L_p(\mu)$$

Ponadto, obcięcie operatora E do podprz. $L_p(\mu)$ jest zadowalającym jedynym rzutem

$$E : L_p(\mu) \to L_p(\mu|_{\mathcal{G}}) \subseteq L_p(\mu)$$

o normie 1 jako element $B(L_p(\mu))$

Dowód: Niech $X \in L_p(\mu)$, tzn $\int_\Omega |X|^p d\mu < \infty$

Z nierówności Jensena zastosowanej do $f(X) = |X|^p$

$$|E(X|\mathcal{G})|^p \leq E(|X|^p | \mathcal{G})$$

oraz skoro $\int_\Omega E(|X|^p | \mathcal{G}) d\mu \underset{\Omega \in \mathcal{G}}{=} \int_\Omega |X|^p d\mu < \infty$,

czyli $E(|X|^p|\mathcal{G}) \in L_1(\mu)$, to

$|E(X|\mathcal{G})|^p \in L_1(\mu)$. Równoważnie $E(X|\mathcal{G}) \in L_p(\mu)$.

Zatem operator

$E: L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ poprawnie określony

Jasne jest, że obcięcie to jest nadal oraz $E(1)=1$ $(1 \in L_p(\mu))$.

„norma E na L_p"

$$\|E(X)\|_p = \left(\int_\Omega |E(X)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{N. Jensen}}{\leq} \left(\int_\Omega E(|X|^p)\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{\Omega \in \mathcal{G}}{=} \left(\int_\Omega |X|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|X\|_p$$

Zatem $\|E\|_{L_p} \leq 1$. Stąd $\|E\|_{L_p} = 1$, bo E nierowny zeru. $\blacksquare$

TW (ANDO 1966) Dla dowolnego $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, operator $E: L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ jest WWO $\iff$ $E^2 = E$, $E(1)=1$, $\|E\|=1$.

Dowód: Dla $p=1$ już było (Tw. Douglas).

Niech $p > 1$.

„$\Rightarrow$" Wynika z poprzedniego stwierdzenia

„$\Leftarrow$" Niech $E^2 = E$, $E(1)=1$, $\|E\|_{L_p}=1$. $E: L_p(\mu) \to L_p(\mu)$

„ANDO WYKAZAŁ, ŻE WTEDY operator E jest kontrakcją w normie L_1 tzn

$$\forall_{X \in L_p(\mu) \subseteq L_1(\mu)} \quad \int_\Omega |E(X)|\, d\mu \leq \int_\Omega |X|\, d\mu$$

Skoro $L_p(\mu)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_1(\mu)$ (w normie L_1) to E przedłuża się jednoznacznie do kontrakcji

$\bar{E} : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ (czyli $\|\bar{E}\|_{L_1} = 1$)

Oczywiście, $\bar{E}(1) = E(1) = 1$ oraz $\bar{E}^2 = \bar{E}$.

Zatem z Tw Douglasa

$\bar{E}$ jest WWO na $L_1(\mu)$

Czyli E jest WWO na $L_p(\mu)$ ∎

Przykład (kontraktywnego, zachowującego 1 rzutu na L_2, który nie jest WWO)

Rozważmy $L_2[-1,1]$ i niech P będzie rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń rozpiętą przez funkcje

$$1, \quad t$$

(przestrzeń funkcji afinicznych $a + bt$)

Z definicji: P spełnia $P^2 = P$, $\|P\| = 1$ oraz $P1 = 1$

Ponadto skoro

$1 \perp t$ w $L_1[-1,1]$

$$\boxed{\langle 1, t\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot t \, dt = 0}$$

oraz $\|1\|_2 = \sqrt{2}$ i $\|t\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, to

$$Px = \frac{\langle 1, x\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 + \frac{\langle t, x\rangle}{\langle t,t\rangle}\cdot t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,ds + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} s\cdot x\,ds\cdot t$$

$M = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, \dots y_n\}$ $\quad y_i \perp y_j$ $\quad i \neq j$

$$P_M x = \frac{\langle x, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 + \frac{\langle x, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2 + \dots + \frac{\langle x, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, y_i\rangle}{\|y_i\|^2} y_i$$

Jeżeli dodatkowo $\|y_i\| = 1$, dla $i = 1, \dots n$

to

$$P_M x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_i\rangle y_i$$

$$(Px)(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(s)\,ds + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} s\cdot x(s)\,ds \cdot t$$

Rzut P NIE JEST DODATNI!

zatem NIE JEST WWO!

Np biorąc $X = \mathbb{1}_{[0,1]} \geq 0$ mamy

$$(PX)(t) = \frac{1}{2}\boxed{\int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[0,1]}\,ds} + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} s\,\mathbb{1}_{[0,1]}\,ds \cdot t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1\,ds + \frac{3}{2}\int_0^1 s\,ds \cdot t$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot t \leftarrow$$ to nie jest funkcja dodatnia

$$(PX)(-1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} < 0 \quad \boxed{\text{E}}$$

Kompleksyfikacja operatorów na L_p, $1 \leq p < \infty$

Zespolona przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$:

$$L_p^{\mathbb{C}}(\mu) = L_p^{\mathbb{R}}(\mu) + i\,L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$$

Jeśli $T: L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ operator $\mathbb{R}$-liniowy to jego kompleksyfikacja

$$\forall_{x,y \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)} \quad T_{\mathbb{C}}(x+iy) := Tx + i\,Ty$$

jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym $T_{\mathbb{C}}: L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$.

STW. $T \in B(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \Rightarrow T_{\mathbb{C}} \in B(L_p^{\mathbb{C}}(\mu))$

oraz $\|T_{\mathbb{C}}\| \le 2\cdot\|T\|$. (jasne, że $\|T\| \le \|T_{\mathbb{C}}\|$)

Dowód:

$$\|T_{\mathbb{C}}(x+iy)\|_p \overset{\text{def: } T_{\mathbb{C}}}{=} \|Tx+iTy\|_p \overset{\text{N. trójkąta}}{\le} \|Tx\|_p+\|Ty\|_p$$

$$\le \|T\|\cdot\|x\|_p + \|T\|\,\|y\|_p$$

$$\le \|T\|\,\|x+iy\|_p + \|T\|\cdot\|x+iy\|_p$$

$$= 2\|T\|\cdot\|x+iy\|_p.$$

$|x|,|y| \le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$ czyli $\int|x|^p d\mu \le \int|x+iy|^p d\mu$ itp.

Stąd $\|T_{\mathbb{C}}\| \le 2\cdot\|T\|$ □

Uwaga: (Holtz, Konow 2005) $\|T\| = \|T_{\mathbb{C}}\|$.

Czyli mamy ciągłe (izometryczne) zanurzenie

$$B(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \ni T \longrightarrow T_{\mathbb{C}} \in B(L_p^{\mathbb{C}}(\mu))$$

Zauważmy, że $T_{\mathbb{C}}(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \subseteq L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$

Def: Operator $T : L_p^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest rzeczywisty („samosprzężony”) jeżeli

$$T(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) \subseteq L_p^{\mathbb{R}}(\mu).$$

Uwaga 1: T jest op. rzeczywistym $\iff$

$$\forall_{z \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)} \quad T\bar{z} = \overline{Tz}$$

Uwaga 2: Jeśli T jest rzeczywisty, to

$T|_{L_p^{\mathbb{R}}(\mu)}$ jest $\mathbb{R}$-liniowym op. na $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$

Oraz

$$T = \left(T|_{L_p^{\mathbb{R}}(\mu)}\right)_{\mathbb{C}}$$

Czyli

T jest rzeczywisty $\iff$ T jest kompleksyfikacją operatora $\mathbb{R}$-liniowego na przestrzeni rzeczywistej

$\boxed{\text{Lem}}$ T dodatni $\Rightarrow$ T rzeczywisty.

Dowód: T dodatni $\iff \forall_{f \geq 0} \; Tf \geq 0 \quad \left(\forall_{t \in \Omega} (Tf)(t) \geq 0\right)$

$\Rightarrow \forall_{f : \Omega \to \mathbb{R}} \quad Tf = T(f_+ - f_-) = Tf_+ - Tf_-$

Czyli $(Tf)(t) \in \mathbb{R}$. ⊠

Lem 2 już był (wykład 5) $Q: L_1^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ zachowuje 1 i jest kontrakcją $\Rightarrow$ Q dodatni

ZESPOLONE WWO

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - pr. z miarą skończoną, i $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Dla zespolonej funkcji $f \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ definiujemy WWO $E(f)$ jako zespoloną funkcję $E(f) \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ taką, że

(WWO1) $E(f)$ jest $\mathcal{G}$ mierzalna

(WWO2) $\forall_{A \in \mathcal{G}} \int_A f \, d\mu = \int_A E(f) \, d\mu$

STW: Zespolone WWO zawsze istnieje i jest kompleksyfikacją rzeczywistego WWO. (w szczególności jest wyznaczone jednoznacznie)

Dowód: $f \in L_1^{\mathbb{C}}(\mu) \Leftrightarrow f = x + iy$, $x, y \in L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$

Niech $E^{\mathbb{R}}$ rzeczywiste WWO względem $\mathcal{G}$, $E^{\mathbb{R}}: L_1^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$. Połóżmy

$$E(f) := E^{\mathbb{R}}(x) + iE^{\mathbb{R}}(y) \qquad \{E = (E^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}\}$$

Wtedy $E(f)$ spełnia (WWO1), bo $E^{\mathbb{R}}(x)$ i $E^{\mathbb{R}}(y)$ $\mathcal{G}$-mierzalne.

oraz (WWO2)

$$\forall_{A \in \mathcal{G}} \quad \int_A E(f)\,d\mu \overset{def}{=} \int_A E^{\mathbb{R}}(x)\,d\mu + i\int_A E^{\mathbb{R}}(y)\,d\mu \overset{(WWO2)\ dla\ E^{\mathbb{R}}}{=}$$

$$= \int_A x\,d\mu + i\int_A y\,d\mu \overset{def}{=} \int f\,d\mu.$$

Ponadto, jeśli $E(f)$ spełnia (WWO1) i (WWO2) dla funkcji rzeczywistej $f \in L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$, to $E(f)$ musi być rzeczywiste WWO. ∎

Tw. (Douglas 1965)

Operator $E: L_1^{\mathbb{C}}(\mu) \to L_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest WWO $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $E^2 = E$, $E(1) = 1$, $\|E\| = 1$.

Dowód: "$\Rightarrow$" łatwe (bo E kompleksyfikacja rzeczywistej WWO) $\|E\| = 1$ ∎

"$\Leftarrow$" $\boxed{\text{Lem 2 wykład 5}}$ $\Rightarrow$ E jest dodatni. czyli

$E = (E^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ gdzie $E^{\mathbb{R}}: L_1^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_1^{\mathbb{R}}(\mu)$

$$E^{\mathbb{R}} = E|_{L_1^{\mathbb{R}}(\mu)}$$

Ponadto $E^{\mathbb{R}}(1) = 1$, $\|E^{\mathbb{R}}\| = 1$

$$E^2 = E \Rightarrow (E^{\mathbb{R}})^2 = E^{\mathbb{R}}$$

$$E^2(x+iy) = E(E^{\mathbb{R}}(x) + iE^{\mathbb{R}}(y)) = (E^{\mathbb{R}})^2(x) + i(E^{\mathbb{R}})^2(y)$$

$$\overset{\shortparallel}{E}(x+iy) = E^{\mathbb{R}}(x) + iE^{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow (E^{\mathbb{R}})^2(x) = E^{\mathbb{R}}(x)$$

Stosując rzeczywistego Douglasa otrzymujemy, że $E^{\mathbb{R}}$ jest rzeczywistą WWO. Zatem E jest zespolony WWO jako kompleksyfikacja rzeczywistej WWO $\boxtimes$

Uwaga: Powyższy argument nie przenosi się na przestrzenie L_p, $p > 1$, bo lemat działa tylko dla $p = 1$.